



## Серия №10. Бесконечность

7 июля

1. Найдутся ли:

- а) сколь угодно много последовательных составных чисел?
- б) бесконечно много последовательных составных чисел?

2. Известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен. Число людей в каждом поколении конечно. Докажите, что найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама.

**Лемма.** Если бесконечное множество разбито на конечное число подмножеств, то хотя бы одно из подмножеств – бесконечно.

### Задачи

3. Дана бесконечная числовая последовательность. Для любого  $n$  сумма  $n$  первых членов последовательности больше  $n$ . Докажите, что в последовательности бесконечно много положительных членов.
4. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей различного роста, причём рост каждого составляет натуральное число сантиметров. Докажите, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания.
5. Имеется таблица из трёх строк и бесконечного числа столбцов. В каждой клетке таблицы стоит натуральное число. Доказать, что можно так выбрать два столбца в таблице, что в каждой из строк число, стоящее в первом столбце будет не меньше числа, стоящего во втором столбце.
6. Множество натуральных чисел разбито на конечное число непересекающихся подмножеств. Докажите, что среди них можно выбрать подмножество  $S$  такое, что для любого натурального числа  $n$  множество  $S$  содержит бесконечно много чисел, кратных  $n$ .
7. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей различного роста. Докажите, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания или убывания.
8. На планете счетное множество городов, и любые два соединены либо автомобильной дорогой, либо железной дорогой, либо авиалинией, либо морским путём. Докажите, что можно выбрать некоторое бесконечное подмножество городов так, что все пары выбранных городов связаны одним и тем же способом.

**Определение.** Бесконечное множество называется счётным, если все его элементы могут быть пронумерованы натуральными числами (т.е. существует биекция с  $\mathbb{N}$ .)

9. Пусть  $A_1, A_2, A_3, \dots$  – бесконечная последовательность конечных множеств. Известно, что для любого конечного набора множеств из этой последовательности можно так выбрать по одному элементу из каждого множества, что все эти элементы будут попарно различны. Докажите, что из каждого множества всей последовательности можно выбрать по одному элементу, чтобы все эти элементы были попарно

различны.